Université de Montréal

Approche options réelles :
Évaluation d'un projet de construction séquentiel
de trois lignes d'embouteillage

Rapport de recherche

Présenté par : Mélanie Arcand
ARCM01618009

Jeudi, le 28 avril 2005

Ce rapport fait état de l'évaluation d'un projet d'investissement en mettant en évidence l'approche par les options réelles. En prenant comme référence un projet de construction de la compagnie PepsiCo Inc., inspiré du cas 9B00N016 de Ivey School of Business, l'évaluation de la rentabilité se fait en valorisant les différentes opportunités crée par cet investissement. La méthode d'évaluation par les options réelles, quoique possédant plusieurs similitudes avec le critère de la valeur présente nette, considère toutefois l'incertitude comme étant une source de valeur. Cette approche est étroitement dévirée de celle utilisée dans le domaine financier pour le calcul des options financières. C'est ainsi que l'analyse d'un projet où l'investissement doit être entrepris dans l'immédiat, est présentée en détail. Tout au long de l'analyse, seules les revenus de vente de l'entreprise sont source d'incertitude. L'évolution de ces revenus est ainsi représentée par un Mouvement Brownien Géométrique. Les principales conclusions de l'analyse démontrent que l'incertitude est créatrice de valeur. En effet, la volatilité vient augmenter la valeur du projet puisqu'elle offre une fenêtre d'opportunité plus large. De plus, la valeur du projet est aussi une fonction croissante du taux de croissance ajusté pour le marché. C'est ainsi que l'approche par les options réelles mène à l'acceptation du projet. Parmi les différents critères de sélection existants, l'approche par les options réelles se révèle comme étant la plus complète. L'évaluation par les options réelles s'avère donc la méthode la plus optimale dans un contexte de gestion flexible.

Mots clés : Flexibilité, Volatilité, Mouvement Brownien, Opportunité, Valeur présente nette, Incertitude, Flux monétaires, Critère de sélection

TABLE DES MATIÈRES

LISTES DES TABLEAUX ET GRAPHIQUES

1. Introduction

La valeur présente nette est, sans aucun doute, le critère de sélection de projets d'investissement le plus prôné dans les écoles de gestion. Toutefois, plusieurs praticiens et théoriciens dénoncent le fait que ce critère ignore totalement le caractère opportuniste des dirigeants d'entreprises. C'est ainsi que l'approche par les options réelles, visant à identifier et quantifier les composantes optionnelles des projets, est apparue comme étant la solution à cette lacune. En effet, les options découlant d'un projet peuvent changer considérablement la décision d'investissement. L'approche par les options réelles ne vient donc en aucun point dénigrer la valeur présente nette mais vient plutôt la bonifier en incorporant la flexibilité. Ce rapport a ainsi pour objectif de démontrer concrètement comment l'évaluation par les options réelles peut être appliquée dans le cas d'un projet d'investissement. Pour ce faire, un projet d'expansion de l'entreprise PepsiCo Inc[1], oeuvrant, entre autre, dans le secteur des boissons non alcoolisées, sera considéré. Ce projet consiste en la possibilité de construire une ligne d'embouteillage dans leur usine de Changchun en Chine. La construction de cette ligne donnera ainsi l'option à l'entreprise de construire une deuxième ligne qui, à son tour, donnera l'option de construire une troisième ligne. Dans un premier temps, certains principes généraux concernant l'approche par les options réelles seront expliqués afin de bien comprendre les fondements de la théorie des options réelles. Ainsi, les similitudes entre les options financières et réelles seront évoquées de même qu'une brève description des différentes options réelles pouvant émaner d'un projet d'investissement. Dans un second ordre d'idées, le cadre d'analyse d'un premier cas, où l'investissement doit être entrepris dans l'immédiat, sera présenté. Les paramètres utilisés, de même que la description de l'approche options réelles, seront aussi exposés. L'évaluation et l'analyse de ce cas viendront clôturer cette section en illustrant les différents résultats obtenus. Finalement, différents critères de sélection seront détaillés afin de les comparer avec l'approche par les options réelles. Toutes ces étapes permettront donc de conclure sur les bienfaits de l'approche par les options réelles en ce qui a trait à l'évaluation de projets d'investissement.

[1] Inspiré du cas 9B00N016 de Ivey School of Business

2. Évaluation des options réelles – Principes généraux

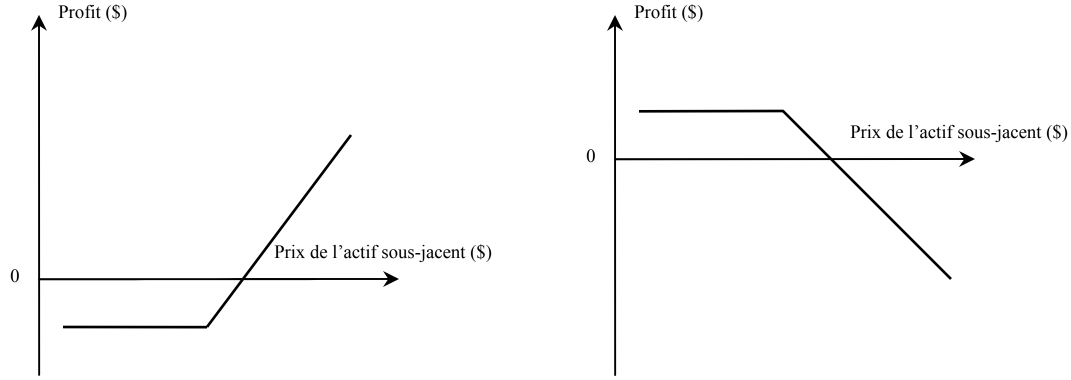
La méthodologie relative aux options réelles est encore méconnue par plusieurs entreprises. Cette approche est pourtant dérivée de celle utilisée en finance en ce qui a trait aux options financières. L'évaluation et l'analyse du cas qui suit requièrent que certains principes généraux soient préalablement exposés afin de bien comprendre les éléments qui sous-tendent l'approche options réelles. Dans un premier temps, une analogie entre les options financières et réelles sera présentée et démontrera les différents facteurs pouvant affecter leur valeur. Par la suite, les différentes formes que peuvent prendre ces options réelles seront précisées.

2.1 Options financières vs options réelles

Les options réelles s'apparentent beaucoup aux options financières même s'il est important de faire attention aux détails particuliers de chacune. Une option financière est un contrat entre deux parties qui donne au détenteur le droit mais non l'obligation d'acheter (option d'achat ou call) ou de vendre (option de vente ou put) un actif à un prix prédéterminé. Deux types d'options sont les plus connues soient l'option européenne qui ne peut être exercée qu'à une date bien précise et l'option américaine qui peut être exercée tout au long d'un intervalle de temps, appelé période d'exercice. Il existe toutefois plusieurs combinaisons d'options possibles qui peuvent répondrent à différents besoins en terme de couverture contre le risque.

Différents facteurs peuvent affecter la valeur d'une option financière. Prenons l'exemple d'une option d'achat ayant comme actif sous-jacent le titre d'une société. Tout d'abord, la volatilité est un des paramètres qui affecte positivement la valeur de l'option. En effet, avec l'accroissement de la volatilité, la valeur de l'action s'établira dans un intervalle plus large. Puisque les options d'achat protègent contre les risques baissiers, seule l'augmentation du prix de l'actif sous-jacent aura un effet sur la valeur de l'option. Ainsi, l'augmentation de la volatilité affectera de façon positive le prix de l'action et ce dernier aura plus de chance d'être supérieur au prix d'exercice. Si c'est le cas, l'option sera exercée entraînant un profit sinon, l'option ne sera pas exercée.

FIGURE 1 :
Options Financières



(a)
Profit découlant d'une option d'achat

(b)
Profit découlant d'une option de vente

Par cette explication, il est alors tout aussi intuitif de considérer le prix de l'action comme un facteur affectant positivement la valeur des options. Lorsque le prix de l'action augmente, la valeur de l'option se retrouve aussi augmentée. La date d'expiration de l'option est un des derniers éléments rehaussant la valeur des options. Une date d'expiration éloignée offre une fenêtre d'opportunité beaucoup plus vaste au détenteur et ainsi augmente la valeur de l'option. Finalement, le prix d'exercice est le seul déterminant ayant un effet négatif sur la valeur d'une option d'achat. En effet, l'option sera exercée que si le prix du titre est égal ou supérieur au prix d'exercice. Lorsque ce dernier augmente, il faut alors que le prix de l'action subisse une augmentation encore plus grande afin d'exercer l'option. Donc, une augmentation du prix d'exercice diminue les chances que l'option soit exercée et diminue la valeur de l'option. Le tableau 1 résume les paramètres et leur effet sur les deux types d'options.

Du côté des options réelles, leur valeur est aussi affectée par les mêmes facteurs que les options financières. Dans un premier temps, la volatilité des flux monétaires augmente la valeur des options réelles. En effet, les options réelles permettent de profiter des opportunités favorables et protègent contre les opportunités défavorables. Ainsi, seul le côté positif de la volatilité affectera la valeur des options réelles en l'augmentant. La valeur des flux monétaires espérés est aussi positivement liée à la valeur de l'option tout comme l'était la valeur de l'actif sous-jacent dans le cas des options financières.

TABLEAU 1 :
Déterminants affectant la valeur des options financières et réelles

Paramètres	*Options financières*	*Options réelles*
Volatilité	+	+
Valeur de l'actif sous-jacent/ Valeur des flux monétaires espérés	+	+
Date d'expiration	+	+
Prix d'exercice/Coût d'investissement	-	-

Le même raisonnement que précédemment s'applique : les options limitent les risques de pertes et ainsi, leur valeur ne peut que rester stable ou s'améliorer. De plus, une date d'expiration plus éloignée permet d'être mis en présence d'une plus vaste gamme d'opportunités et ceci pousse la valeur de l'option à la hausse. En dernier lieu, le coût d'investissement, qui peut se comparer au prix d'exercice des options financières, est le seul facteur affectant négativement la valeur de l'option. Un coût d'investissement plus élevé diminue alors la valeur de l'option.

Malgré toutes les similitudes entre ses deux types d'options, certains aspects les différencient toutefois l'un de l'autre. Dans un premier temps, les options réelles ne se transigent pas sur la base d'un contrat contrairement aux options financières. En effet, le détenteur d'une option réelle n'a pas à transiger avec un tiers. Puisqu'il ne fait face à aucun vendeur, le coût d'investissement n'est pas stipulé contractuellement. Finalement, les actifs réels, qui font l'objet des options, ne sont pas transigés sur le marché secondaire comme le sont les actifs financiers. Ainsi, la quête d'informations peut être beaucoup plus ardue et des risques d'asymétries d'informations peuvent survenir.

2.2 *Types d’options*

Lorsqu’une entreprise considère un projet d’investissement, plusieurs options doivent être considérées. Il existe, en effet, différents types d’options réelles selon la nature des projets. Parmi ceux-ci, l’option d’expansion, d’abandon et l’option de différer le projet sont probablement les plus courantes. Tout d’abord, l’option d’expansion consiste, entre autre, en la possibilité d’augmenter la production, de vendre dans de nouveaux marchés ou bien d’agrandir une usine. Cette option possède les mêmes caractéristiques qu’une option d’achat de type européenne puisque l’investissement doit se faire à une date précise. L’option d’abandon, quant à elle, correspond, par exemple, à l’opportunité de fermer soit de façon permanente ou temporairement son usine ou d’arrêter la production lorsque les coûts de production sont trop élevés par rapport aux revenus. Cette option peut être vue comme étant une option de vente de type européenne dont le prix d’exercice sera alors égal à la valeur des actifs de l’entreprise. L’option de différer un investissement, de son côté, est différente des deux autres options expliquées précédemment. Cette option permet, par exemple, de retarder un investissement lorsque les conditions du marché ne semblent pas suffisamment favorables. Il s’agit en fait d’une option d’achat de type américaine qui, comme mentionné précédemment, peut être exercées dans un certain laps de temps.

Les différentes caractéristiques énoncées plus haut ne sont que quelques unes des particularités des options réelles. Toutefois, l’application de cette méthode à un cas concret permettra de mieux comprendre comment les options réelles agissent sur la valeur des projets d’investissement.

3. Sommaire du projet

3.1 *Mise en situation générale*

C’est en 1965 que l’entreprise PepsiCo Inc. a vu le jour grâce à la fusion de Pepsi-Cola et de Frito-Lays Inc. Déjà à cette époque, l’entreprise enregistrait des ventes de l’ordre de 510 millions de dollars et comptait 19 000 employés. Après leur croissance rapide des années 1970, plusieurs investissements, ayant pour cible leurs marchés clés comme celui du Japon et de l'Europe de l'Est, ont eu lieu. Ce n'est qu'en 1981 que PepsiCo Inc. parvient à s'entendre avec la Chine afin de construire différentes usines d'embouteillage de boissons gazeuses. Grâce aux nombreux investissements faits dans ce pays, l'entreprise possède aujourd'hui plusieurs usines dans la partie Est de la Chine.

Du côté de l'industrie des boissons non alcoolisées, les experts s'attendent à une forte croissance des marchés étrangers. En effet, le marché américain étant de plus en plus saturé, ceci devrait pousser les compagnies à investir davantage outre mer où plusieurs marchés, pouvant avoir un bon potentiel, ne sont pas encore exploités. PepsiCo Inc. a déjà entrepris ce virage et parmi tous les projets d'investissement de sa division PepsiCo International, le dernier projet d'intérêt est la construction d'une ligne d'embouteillage dans son usine de Changchun. Cet investissement, dans une des villes importantes de la région de Jilin, leur permettrait de desservir un vaste territoire à l'ouest de la ville qui est jusqu'à maintenant inexploité. Les dirigeants sont toutefois incertains face aux revenus de vente possibles puisque très peu de boissons gazeuses sont distribuées dans les villes et villages éloignés. Face à cette incertitude, l'entreprise se questionne sur la rentabilité de cet investissement.

3.2 Conditions d'existence des options réelles

Afin d'utiliser la valeur des options réelles comme critère de sélection, un projet doit répondre à trois conditions. Dans un premier temps, le projet doit comprendre une part d'incertitude. En effet, si toutes les variables sont connues et qu'il n'y a aucune source d'incertitude, il est possible de savoir immédiatement si le projet est rentable ou non et l'évaluation par les options réelles n'apporte rien de plus. Le projet convoité par PepsiCo Inc. doit donc posséder une part d'incertitude. En effet, cette incertitude provient des revenus de vente qui ne peuvent être déterminés avec assurance. Ainsi, la première condition est respectée.

La deuxième condition d'utilisation exige que les coûts d'investissement soient totalement ou en partie irréversibles. En effet, s'il est toujours possible de récupérer la mise de fond initiale, les entreprises investiront peu importe le risque et les critères de sélection perdront de ce fait tous leurs intérêts. Cette irréversibilité peut ainsi provenir de plusieurs sources. Tout d'abord, si l'investissement est spécifique à l'entreprise, il sera plutôt difficile de récupérer la mise de fond en cas de problème. En effet, la revente d'une usine à utilisation spécifique sera plus difficile que celle à utilisation générale. Il y a aussi toutes les dépenses en marketing et en recherche et développement qui peuvent rendent la mise de fond en partie irrécupérable. Certains coûts non spécifiques peuvent toutefois, eux aussi, être irrécupérables. C'est le cas des équipements informatiques qui perdent automatiquement de leur valeur une fois achetés. Une autre source d'irréversibilité peut provenir des règlements gouvernementaux ou tout simplement des coûts de formation de la main-d'œuvre. Le projet de PepsiCo Inc., quant à lui, est très spécifique aux besoins de l'entreprise et ainsi la récupération de la mise de fond initiale est pratiquement impensable. Cette usine ne pourrait être vendue qu'à un autre embouteilleur et dans le cas où l'économie chinoise serait en difficulté, aucun acheteur ne voudrait payer plus que le prix du marché. Ainsi, le montant investit par l'entreprise ne pourrait être récupéré entièrement. De plus, l'entreprise investira des sommes importantes dans la publicité et dans la formation de la main-d'œuvre, ce qui représentent d'autres coûts irrécupérables.

Finalement, la dernière condition impose la présence de flexibilité au sein des décisions de l'entreprise. Les gestionnaires peuvent ainsi appliquer une gestion active en saisissant diverses opportunités et peuvent alors profiter des options réelles afin d'augmenter la valeur du projet. Sans flexibilité, l'évaluation par les options réelles devient donc impraticable puisque aucune opportunité ne peut être saisie au profit de l'entreprise. Il est donc plausible d'assumer que les projets de PepsiCo Inc. peuvent être réorientés à la vue de nouvelles informations et donc que PepsiCo Inc laisse place à la flexibilité dans ces décisions.

3.3 Sources d'incertitude

Tout au long du projet, seuls les revenus de vente de l'entreprise seront source d'incertitude. Cette source d'incertitude est considéré comme étant un facteur totalement exogène sur lequel les dirigeants n'ont aucune influence. Comme mentionné précédemment, il est très difficile d'estimer ces revenus puisque l'entreprise essaye de percer un nouveau marché où très peu de produits semblables sont distribués. Les revenus de vente seront ainsi les seuls à pouvoir affecter la valeur du projet et donc la décision d'investissement. Ainsi, l'évolution des revenus de vente de l'entreprise se fera selon le processus stochastique suivant :

$$dR_t = \alpha R_t dt + \sigma R_t dz \qquad \text{Avec} \quad dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} \qquad \text{et} \quad \varepsilon \sim \mathrm{N}\,(0,1)$$

qui est un Mouvement Brownien Géométrique[2] où chaque R_t prendra une valeur supérieure ou égale à zéro. Ainsi, les changements de R_t, ΔR, seront distribués selon une loi log-normale. Toutefois, si R_t suit un Mouvement Brownien Géométrique alors $Y_t = \ln R_t$ suit un Mouvement Brownien;

$$dY_t = (\alpha - \tfrac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dz$$

Ainsi, le changement dans le logarithme de R sur un intervalle de temps t sera normalement distribué avec une moyenne de $\ln R_0 + (\alpha - 0.5\sigma^2)t$ et une variance de $\sigma^2 t$. Ici, la constante α représente le taux de croissance du marché. C'est donc ce processus qui permettra de modéliser les revenus futurs de l'entreprise.

4. Description du cas avec investissement immédiat

4.1 Mise en situation

Le premier cas consiste en la possibilité de construire une ligne d'embouteillage qui donnera l'option d'en construire une deuxième qui elle, à son tour, donnera l'option d'en construire une troisième. Pour ce, trois décisions doivent être rendues à différentes dates. Tout d'abord, au début de l'an 2006, l'entreprise doit considérer l'investissement pour la première ligne d'embouteillage. Cette ligne doit absolument être installée pour que l'entreprise ait l'option de construire la deuxième. Dans ce cas, deux évènements sont possible : si les conditions du marché sont favorables et que cet investissement est rentable, la construction débutera et PepsiCo Inc. pourra considéré l'option d'en construire une deuxième. Dans le cas où les conditions seraient défavorables,

[2] Voir annexe 1 pour plus de détails

l'investissement n'aura pas lieu et aucune ligne subséquente ne pourra être construite. Au début de l'an 2010, dans le cas où la première ligne aurait été construite, l'entreprise pourra considérer l'option d'investir ou non dans la construction de la deuxième ligne d'embouteillage. Ainsi, dans le cas où cette deuxième ligne est construite, le même principe se reproduit en 2014 où la construction de la troisième et dernière ligne d'embouteillage doit être considérée. Dans le cas où la deuxième ligne n'est pas construite, la dernière option n'existe plus et il est impossible de construire la troisième ligne. En somme, une décision devra être rendue en 2006, en 2010 et en 2014.

4.2 Description des paramètres

Chacune des lignes d'embouteillage ont les mêmes capacités de production et une fois installées, elles seront utilisées à pleine capacité et ce, durant toutes leur vie. Puisque l'entreprise déboursera périodiquement pour l'entretient et la réparation de ces lignes d'embouteillage, il est assumé qu'elles auront une durée de vie infinie. Les différentes lignes n'ont toutefois pas les mêmes coûts. L'investissement pour la première ligne d'embouteillage, de l'ordre de 21 millions de dollars, sera le plus élevé. En effet, des modifications doivent être apportées à l'usine existante afin de s'assurer du bon fonctionnement des lignes d'embouteillage. Ces modifications prévoient l'agrandissement d'une partie de l'usine où les lignes seront installées en plus du remplacement de certains équipements désuets pour cette nouvelle technologie. Ainsi, comme son installation est plus complexe, les coûts d'investissement seront plus élevés. Du côté des coûts d'opérations, ceux-ci seront aussi plus élevés puisque des dépenses considérables doivent être faites, entre autre, afin de former la main-d'œuvre adéquatement. De plus, des sommes importantes doivent être déboursées au niveau du marketing afin de faire connaître le produit dans les villes et villages avoisinants. Ainsi, un montant de 21.8 millions servira à payer les différents coûts d'opérations annuellement ce qui inclut aussi les déboursés d'entretien et de réparation de la ligne. Du côté de la deuxième et la troisième ligne d'embouteillage, ces différents coûts seront moindres. Les coûts d'investissement pour la deuxième ligne d'embouteillage sont de 19 millions de dollars tandis que ceux de la troisième sont de 17 millions de dollars. Les coûts d'opération, quant à eux, sont respectivement de 21.2 et 20.6 millions de dollars annuellement. Cette baisse s'explique par le fait que l'installation et l'intégration des lignes seront plus faciles et que d'autre part, les dépenses en formation du personnel se seront stabilisées. Le tableau 1 démontre donc les différents coûts associés à chacune des lignes d'embouteillage.

Tableau 2 : Coûts du projet avec investissement immédiat

Variables	*Ligne #1*	*Ligne #2*	*Ligne #3*
Coûts d'investissement I_t	21 000 000	19 000 000	17 000 000
Coûts d'opération C_t	21 800 000	21 200 000	20 600 000

D'autres paramètres sont aussi très importants dans la détermination de la valeur du projet. Dans un premier temps, T_i représente la date à laquelle PepsiCo Inc doit rendre une décision. Trois valeurs sont ainsi possibles soit $T_1 = 0$ pour la décision initiale de 2006, $T_2 = 1$ pour celle qui doit être rendue en 2010 et finalement $T_3 = 2$ pour la décision concernant la dernière ligne en 2014. Pour ce qui est de la durée de vie des lignes d'embouteillage, τ_i , cette dernière est assumée comme étant infinie. Finalement, le taux auquel PepsiCo Inc. actualise ces projets est de l'ordre de 8% et le taux de croissance du marché utilisé est de l'ordre de 6%.

Ainsi, PepsiCo Inc. possède, à chaque étape, le droit mais non l'obligation d'investir dans la construction d'une ligne d'embouteillage. Ce projet comporte ainsi trois phases et cela n'oblige pas l'entreprise à investir dans ces trois phases. La valeur de construire la première ligne prend en compte la valeur des options de construction de la deuxième et de la troisième ligne. Il en est de même pour la valeur de la deuxième ligne qui tient compte de la possibilité de construire la dernière ligne. Pour ce qui est de la troisième et dernière ligne d'embouteillage, son évaluation se fait seulement à partir des flux monétaires qu'elle peut générer.

4.3 <u>Description de l'approche option réelle</u>

Afin d'évaluer la valeur de cet investissement, l'approche option réelle sera utilisée. Dans un premier temps, il faut bien voir que le projet se fait en trois parties soient la première débutant en 2006 pour la construction de la première ligne d'embouteillage, celle commençant en 2010 pour la deuxième unité et celle en 2014 pour la dernière unité. La résolution de se problème se fera alors à l'aide d'un algorithme en procédant à rebours soit en débutant par la décision en t = 2014. En effet, la valeur de la troisième ligne d'embouteillage peut être déterminée puisqu'elle n'engendre aucune autre option. Une fois sa valeur obtenue, la valeur de la deuxième ligne pourra être déterminée et la valeur de la première ligne pourra finalement être calculée en tenant compte de la valeur des options crées. Le principe d'optimalité de Bellman décrit cette idée: "An optimal policy has the property that, whatever the initial action, the remaining choices constitute an optimal policy with the respect to the subproblem starting at the state that results from the initial actions."

4.3.1 <u>Valeur de l'option de construire la troisième ligne d'embouteillage</u>

Afin de calculer la valeur de construire la troisième ligne d'embouteillage il faut considérer l'hypothèse que la deuxième ligne a été construite. Cette hypothèse implique donc que l'entreprise s'est préalablement donnée le droit mais non l'obligation d'investir dans cette troisième unité. Cette option peut ainsi être vue comme étant une option européenne puisque la décision de construire ou non cette unité (donc d'exercer ou non l'option) doit être prise à une date bien précise. Le gain apporté par cette unité sera ainsi donné selon l'équation suivante :

$$F_3(R_{T_3}, T_3) = \text{Max}\ [V_3(R_{T_3}, C_3, \tau_3) - I_3, 0]$$

En effet, le gain encouru grâce à la troisième ligne d'embouteillage, $F_3(R_{T_3}, T_3)$, est déterminé par le maximum entre zéro ou la différence entre la valeur actualisée des flux monétaires possible pour cette période, $V_3(R_{T_3}, C_3, \tau_3)$ et le coût d'investissement I_3. En ayant cette option, l'entreprise limite donc ses possibilités de pertes et pourra choisir de ne pas construire si $V_3(R_{T_3}, C_3, \tau_3) - I_3$ est négatif. Dans ce cas, l'entreprise récolterait un bénéfice nul. Ainsi, PepsiCo Inc. possède le droit mais non l'obligation d'investir I_3 afin de construite une ligne d'embouteillage qui rapportera $V_3(R_{T_3}, C_3, \tau_3)$. Différents calculs doivent être effectués afin de déterminer la valeur de $F_3(R_{T_3}, T_3)$.

Dans un premier temps, il faut déterminer la valeur actualisée des flux monétaires qu'apportera cette troisième unité soit $V_3(R_{T_3}, C_3, \tau_3)$. Cette valeur est en fait constituée de la différence entre l'espérance des revenus de cette ligne d'embouteillage et les coûts d'opération. Dans ce cas, la durée de vie de cette ligne est considérée comme étant infinie ($\tau_3 = \infty$). De plus, puisque les coûts sont déterminés avec certitude, seul l'espérance des revenus de vente de l'entreprise doit être établi. Pour ce faire, le principe mathématique suivant doit être utilisé :

$$E(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_t f(R_t) dR$$

où $f(R_t)$ est la distribution de probabilité de R. En appliquant ce principe, et en effectuant quelques manipulations[3], il sera alors possible de déterminer la valeur de l'espérance des revenus et ainsi d'en dégager la valeur de construire la troisième ligne grâce à cette équation :

$$F_3(R_{T_3}, T_3) = Max\left[\left(\frac{R_{T_3}}{r - \alpha} - \frac{c_3}{r} - I_3 \right), 0 \right]$$

Cette équation représente donc le bénéfice dégagé par l'option de construire la troisième ligne d'embouteillage. Après avoir déterminé cette équation, il est maintenant possible de calculer le revenu qui rendra le bénéfice de l'option nul soit, $R_{T_3}^0$. Cette valeur permettra de déterminer le niveau de revenu nécessaire pour que la construction de la troisième ligne ait lieu. Pour ce faire, il s'agit simplement d'isoler R_{T_3} dans l'équation ci haut ce qui donne :

$$R_{T_3}^0 = (r - \alpha)\left[\frac{C_3}{r} + I_3 \right]$$

[3] Voir annexe 2

4.3.2 *Valeur de l'option de construire la deuxième ligne d'embouteillage*

Maintenant que la valeur de l'option concernant la troisième unité a été calculée de même que $R_{T_3}{}^{0}$, il est maintenant possible de calculer celle de la deuxième ligne en partant de l'hypothèse que la première ligne ait été construite. En investissant dans la deuxième ligne d'embouteillage, l'entreprise se donne l'option de construire la troisième ligne. La valeur de l'option de construire la deuxième ligne doit donc tenir compte du gain qu'elle apporte soit $V_2(R_{T_2}, C_2, \tau_2)$ mais aussi de la valeur de l'option de construire la troisième ligne et qui rapporte $F_3(R_{T_3}, T_3)$. Ainsi, la valeur de l'option doit être déterminée à partir de l'équation suivante:

$$F_2(R_{T_2}, T_2) = Max\left[V_2(R_{T_2}, C_2, \tau_2) + e^{-r(T_3-T_2)} E_{T_2}\left[F_3(R_{T_3}, T_3)\right] - I_2, 0\right]$$

Afin de déterminer la valeur $V_2(R_{T_2}, C_2, \tau_2)$, la même démarche que celle utilisée pour la troisième unité doit être adoptée. Comme le démontre l'équation ci haut, la valeur de cette option européenne prend aussi en compte l'option de construire la troisième ligne. La valeur de l'option est introduite en incorporant l'espérance actualisée de bénéfice de cette dernière soit $E_{T_2}\left[F_3(R_{T_3}, T_3)\right]$. Pour le déterminé, il suffit d'utiliser la distribution de probabilité des revenus et la valeur du gain de la dernière unité. Finalement, la valeur de l'option de construire la deuxième ligne d'embouteillage sera déterminée par l'équation suivante :

$$F_2(R_{T_2}, T_2) =$$

$$Max\left\{ \left(\left[\frac{R_{T_2}}{r-\alpha} - \frac{c_2}{r}\right] + e^{-r(T_3-T_2)}\left[\left(\frac{R_{T_2}}{r-\alpha} * e^{\alpha(T_3-T_2)} \right)\Phi(d_1) - \left(\frac{c_3}{r} + I_3 \right)\Phi(d_2) \right] \right) - I_2, 0\right\}$$

qui est un peu plus complexe que l'équation déterminée à l'étape précédente. En effet, la première partie de l'équation correspond simplement à la valeur actualisée des flux monétaires de la deuxième ligne d'embouteillage. Cette dernière est tout à fait semblable à la valeur trouvée pour la troisième ligne dans la section précédente. Toutefois, la dernière partie de l'équation correspond à la valeur actualisée de l'espérance de bénéfice de la troisième ligne d'embouteillage $E_{T_2}\left[F_3(R_{T_3}, T_3)\right]$. Les éléments $\Phi(d_1)$ et

$\Phi(d_2)$ servent ainsi à calculer la distribution de probabilité de la partie revenu et coût de l'équation ci- haut. À l'aide de tous ces éléments, la valeur de l'option de construire la deuxième ligne d'embouteillage peut alors être déterminée.

4.3.3 *Valeur de construire la première ligne d'embouteillage*

La valeur de construire la première ligne d'embouteillage comprend l'option de construire la deuxième et l'option de construire la troisième ligne d'embouteillage. En effet, en décidant d'investir dans la première ligne d'embouteillage, PepsiCo Inc. acquiert le droit mais non l'obligation de réaliser la deuxième ligne qui elle, donne le droit de réaliser la troisième ligne. Le bénéfice de cette première unité est donné par l'équation suivante;

$$F_1(R_{T_1}, T_1) = Max\left[V_1(R_{T_1}, c_1, \tau_1) + e^{-r(T_2-T_1)} E_{T_1}\left[F_2(R_{T_2}, T_2)\right] - I_1, 0\right]$$

Cette expression peut être décomposée en plusieurs éléments. Afin de déterminer la valeur de construction de la première unité, trois éléments doivent donc être considérés. Dans un premier temps, la valeur actualisée des flux monétaires que procurera cette première ligne d'embouteillage soit $V_1(R_{T_1}, c_1, \tau_1)$ doit être déterminée. La façon de faire est la même que celle utilisée précédemment en prenant soin toutefois de prendre les variables de la première période. Par la suite, la détermination de $E_{T_1}\left[F_2(R_{T_2}, T_2)\right]$ se fait à partir de deux éléments :

$$E_{T_1}\left[F_2(R_{T_2}, T_2)\right] = E_{T_1} Max\left\{V_2(R_{T_2}, c_2, \tau_2) + e^{-r(T_3-T_2)} E_{T_2}\left[F_3(R_{T_3}, T_3)\right] - I_2, 0\right\}$$

En effet, $F_2(R_{T_2}, T_2)$ est composé non seulement du bénéfice engendré par la deuxième ligne d'embouteillage mais aussi de l'espérance de bénéfice de la troisième ligne. L'espérance de bénéfice au temps T_1 de la deuxième unité soit $E_{T_1}\left[V_2(R_{T_2}, C_2, \tau_2)\right]$ doit d'abord être calculé en prenant simplement l'espérance de $V_2(R_{T_2}, c_2, \tau_2)$. En ce qui a trait à l'espérance au temps T_1 de l'espérance au temps T_2 du bénéfice apporter par la dernière unité, soit $E_{T_1}\left\{E_{T_2}\left[F_3(R_{T_3}, T_3)\right]\right\}$, ce dernier élément doit aussi être déterminé.

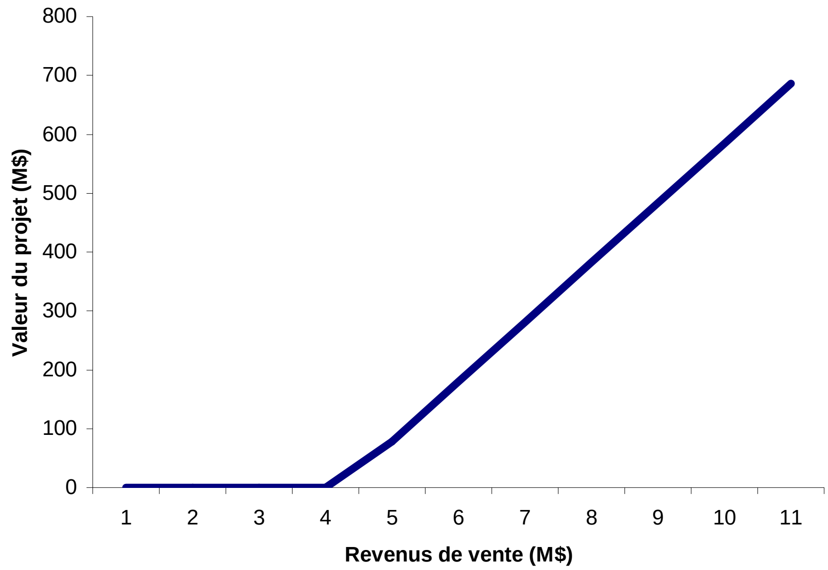
Puisqu'il est cependant plus complexe à évaluer, l'évaluation numérique de Gauss Laguerre doit être utilisée. Les différentes étapes des calculs précédents sont présentées de façon plus explicite à l'annexe 2.

Grâce à toutes ces étapes, il est maintenant possible d'obtenir la valeur de construire la première unité. C'est donc à partir de cette valeur que les dirigeants de PepsiCo Inc. pourront prendre leur décision à savoir s'ils entreprennent ou non la construction de la première ligne d'embouteillage. Par la suite, ils pourront attendrent en 2010 afin d'évaluer, à la vue de nouvelles informations, s'ils entreprennent l'investissement dans la deuxième unité et en 2014 afin de considérer l'investissement dans la troisième et dernière unité. La méthode des options réelles considère donc la flexibilité à travers l'évaluation du projet puisque la construction des deux dernières lignes est considérée comme étant optionnelle. Ainsi, aucun scénario moyen n'est utilisé et la valeur n'est pas sous-estimée.

4.4 Évaluation et analyse

L'évaluation du projet peut maintenant se faire sans problème. Dans un premier temps, il est intéressant d'analyser le comportement du modèle en fonction des revenus de vente de l'entreprise. Le graphique 1 démontre justement l'évolution de la valeur du projet relativement aux revenus. Dans ce cas, toutes les variables autres que les revenus ont été maintenus fixes. Le taux d'actualisation est de 0.08, le taux de croissance du marché est de 0.06 et la volatilité est fixée à 0.20. Dans un premier temps, il est possible de remarquer qu'une augmentation des revenus augmente de façon très rapide la valeur de construire la première ligne. Ce résultat est tout à fait intuitif puisqu'un accroissement des revenus augmente la valeur actualisée des flux monétaires et par conséquent le bénéfice apporté par chacune des unités.

Graphique 1 :
Valeur du projet en fonction des revenus



Ainsi, le niveau de revenus à T = 0 doit être de 4 339 049$ minimum afin que la valeur de construire la première ligne d'embouteillage soit positive. En deçà de cette valeur, l'entreprise n'entreprend pas le projet tandis que toute augmentation de revenus au-delà de cette valeur augmente la valeur du projet. Ainsi, en considérant un niveau de revenus de 6M$ à T = 0 soit au moment de prendre la première décision, le projet générera une valeur de 200 934 500$. La construction de la première ligne d'embouteillage pourra donc avoir lieu et PepsiCo aura alors l'option de construire la deuxième ligne.

Parmi les paramètres affectant la valeur du projet, la volatilité en est un qui affecte les revenus de vente de l'entreprise. En effet, en suivant un processus stochastique de la forme $dR_t = \alpha R_t dt + \sigma R_t dz$, les revenus sont soumis aux variations de la volatilité. Le tableau 3 démontre justement l'effet de cette volatilité sur le revenu initial minimal menant à l'acceptation du projet.

Tableau 3 :
Variation de la volatilité

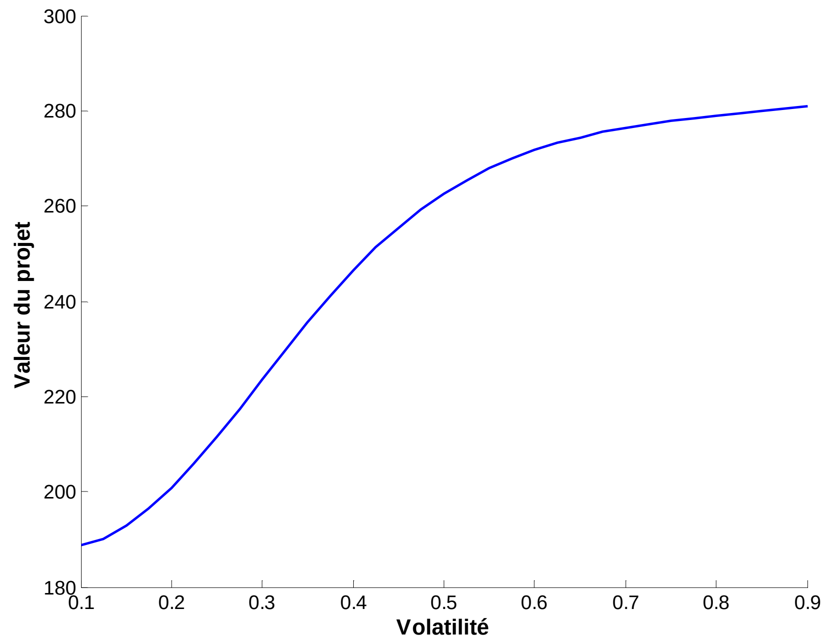
Niveau de volatilité (σ)	*Revenu initial minimal**	*Valeur de construire la 1ère ligne***
20%	*4 339 049 $*	*200 934 500 $*
30%	*4 086 328$*	*223 494 400$*
40%	*3 848 454$*	*246 454 900$*
50%	*3 647 300$*	*262 674 200$*
60%	*3 491 723$*	*271 735 100$*

* Avec r = 0.08 et α = 0.06
** Revenu initial = 6M$, r = 0.08 et α = 0.06

Il est possible de remarquer que ce revenu minimal évolue de façon inverse par rapport à la volatilité. Effectivement, un accroissement de la volatilité hausse la variabilité du processus stochastique. Puisque les revenus sont toujours supérieurs ou égaux à zéro, cette variabilité fait ainsi croître les revenus espérés. Conséquemment, les revenus pourront atteindre des valeurs plus élevées et un revenu initial minimal plus faible pourra conduire à l'acceptation du projet.

La volatilité a aussi un impact sur la valeur de construire la première ligne d'embouteillage. Afin de vérifier cet impact, trois variables ont été maintenu constantes soit le taux d'actualisation à 8%, le taux de croissance du marché à 6% ainsi que le revenu initial à 6M$. Comme démontré dans le tableau ci haut, une hausse de la volatilité augmente la valeur de construction puisque le projet est un ensemble de « call » européens. Les mêmes raisons évoquées plus haut sont aussi impliquées. En effet, avec une hausse de la volatilité, les flux monétaires espérés seront plus élevés conduisant à une valeur de construction plus importante pour la première ligne d'embouteillage. Le graphique 2 démontre la valeur de la construction de la première ligne en fonction de la volatilité. Comme attendu, l'allure générale de la courbe démontre qu'une augmentation du paramètre de volatilité augmente la valeur de construire la première ligne d'embouteillage.

Graphique 2:
Valeur de construire la 1ère ligne d'embouteillage
en fonction de la volatilité
(r = 0.08 et α = 0.06, R =6M$)



Du côté du taux de croissance du marché, ce dernier affecte aussi les revenus de vente de l'entreprise et par le fait même, la valeur de construire la première ligne d'embouteillage. Le processus stochastique, $dR_t = \alpha R_t dt + \sigma R_t dz$, est directement affecté par la variable α soit le taux de croissance. Ainsi le tableau 4 présente les différents revenus initiaux minimaux pour différentes valeurs de α.

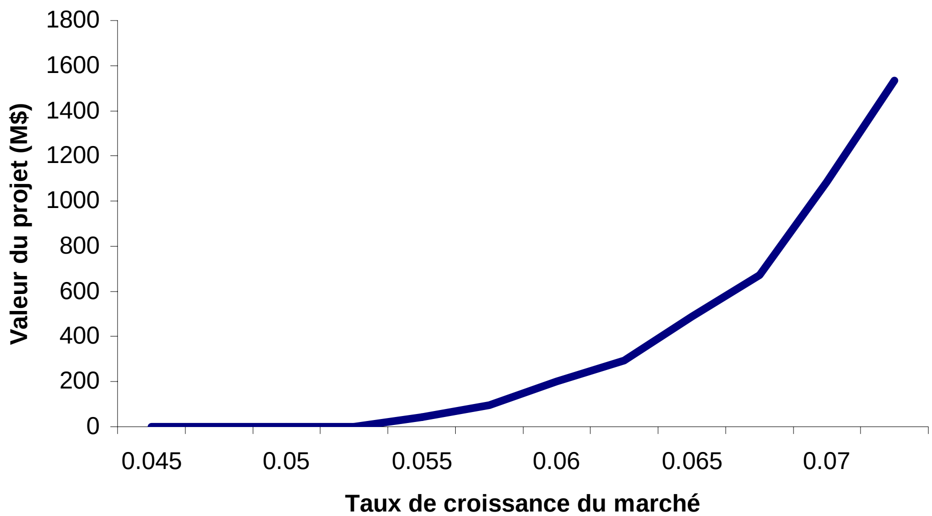
Tableau 4 :
Variation du taux de croissance du marché

Taux de croissance du marché	*Revenu initial minimal**	*Valeur de construire la 1ère ligne***
5.6%	*5 273 773$*	*67 795 000$*
5.8%	*4 803 680$*	*126 723 600$*
6.0%	*4 339 049$*	*200 934 500$*
6.2%	*3 879 916$*	*295 099 700$*
6.4%	*3 426 316$*	*415 990 000$*
6.6%	*2 978 280$*	*574 083 100$*

* Avec r = 0.08 et σ = 0.20
** Revenu initial = 6M$, r = 0.08, σ = 0.20

Il est possible de remarquer que le revenu initial minimal requis diminue lorsque le taux de croissance augmente. En effet, un taux de croissance plus élevé signifie que l'évolution des revenus futurs sera davantage à la hausse apportant ainsi des flux monétaires plus importants. Ainsi, un revenu initial plus faible avec un taux de croissance élevé procure plus de valeur qu'un revenu initial élevé avec un taux de croissance plus faible. Lorsque le paramètre de volatilité est maintenu à 0.2, le taux d'actualisation à 0.08 et que le revenu initial est supposé à 6 millions de dollars, il est possible de remarquer que la valeur de construction de la 1ère ligne augmente en fonction du taux de croissance.

Graphique 3 :
Valeur de construire la 1ère ligne d'embouteillage
en fonction du taux de croissance du marché
(r = 0.08 et σ = 0.20, R =6M$)



Le graphique 3, quant à lui, démontre l'impact que possède le taux de croissance du marché sur la valeur de construire la 1ère ligne d'embouteillage. Une fois de plus, il est possible de remarquer l'allure croissante de la courbe. De plus, la valeur de construire la première ligne devient positive seulement lorsque le taux de croissance est supérieur ou égal à 5.3%. Le taux de croissance du marché a donc un effet positif sur la valeur de construire la 1ère ligne d'embouteillage.

5. Comparaison avec différents critères de sélection

5.1 Valeur présente nette (VPN)

Le critère de la valeur présente nette est utilisé par plusieurs entreprises et sert surtout pour les projets à moyenne ou grande ampleur. En effet, l'analyse par la VPN est plus complexe que les autres puisqu'elle demande une analyse plus détaillée. Toutefois, elle possède plusieurs qualités et n'a pas les défauts reprochés aux autres critères de sélection tel que le taux de rendement interne et le délai de récupération. Le but premier de ce critère est donc de déterminer jusqu'à quel point un projet augmentera la richesse des actionnaires. Afin de calculer la VPN, il suffit de faire la différence entre la valeur actualisée des flux monétaires futurs et le coût d'investissement initial. Pour ce faire, il faut tout d'abord connaître le taux de rendement exigé appelé coût du capital de l'entreprise afin de bien actualiser les flux monétaires. De plus, un scénario moyen concernant les revenus et les coûts futurs du projet doit être établi. De façon simplifiée, il suffit d'actualiser les flux monétaires nets futurs et d'en soustraire l'investissement initial. Le calcul de la valeur présente nette prend donc, de façon générale, la forme suivant :

$$VPN = -I_0 + \frac{FM_1}{(1+r)} + \frac{FM_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{FM_i}{(1+r)^i}$$

Où I_0 = Investissement initial

FM_i = Flux monétaires de la période i

r = Coût du capital

La réalité n'est toutefois pas si simple. En effet, le flux monétaire net ne sera pas seulement constitué de la soustraction des revenus de vente et des coûts des biens vendus. Il faut aussi tenir compte par exemple des coûts d'opportunités, des investissements dans le fond de roulement et de la fiscalité. Ainsi, les projets dont la valeur présente nette est positive, augmenteront la valeur de l'entreprise et seront alors rentables.

Tableau 5 : Critère de décision de la VPN

Valeur présente nette ≥ 0	Accepte le projet
Valeur présente nette < 0	Refuse le projet

La valeur présente nette possède plusieurs qualités dont une qui est cruciale soit l'utilisation de tous les flux monétaires durant la période du projet. De plus, la VPN reconnaît que l'argent a un coût puisque la valeur temporelle des flux monétaires est prise en compte par l'actualisation. Ces différentes caractéristiques rendent donc la VPN plus intéressante et surtout plus précise que le délai de récupération. La valeur présente nette peut aussi être utilisée pour les projets mutuellement exclusifs et ceux comportant des flux monétaires irréguliers. Il faut toutefois faire attention car un investissement de mille dollars peut avoir la même VPN qu'un projet de 1 million. Ceci démontre donc que les risques liés à chaque projet ne sont pas considérés par ce critère. En effet, le critère de la VPN se base sur un scénario moyen et ne tient pas compte du risque de déviation possible par rapport à ce scénario. L'incertitude face au projet se retrouve plutôt au niveau du taux d'actualisation. Le coût du capital exigé par des actionnaires sera d'autant plus élevé que le projet sera risqué. Ainsi, l'incertitude aura comme conséquence d'augmenter le taux d'actualisation et ainsi de diminuer la VPN. L'incertitude ne crée donc pas de valeur au niveau de la VPN puisque la flexibilité est considéré comme étant inexistante à travers les projets. Ce défaut amènera ainsi la VPN à sous estimer la valeur des projets et amènera à des décisions sous optimales pour l'entreprise.

Comme l'a démontré Dixit & Pindyck (1994), la VPN est basée sur une hypothèse implicite : soit l'investissement est réversible et les dirigeants peuvent récupérer leur mise de fonds initiale ou l'investissement est irréversible et il doit être entrepris dans l'immédiat ou jamais. Cette hypothèse vient ainsi violer une des principales caractéristiques de plusieurs projets soit la flexibilité des investissements. Contrairement à la VPN, la valeur des options réelles reconnaît que les dirigeants peuvent adopter une gestion active en ce qui a trait aux opportunités d'investissement et peuvent modifier les projets dans le meilleur intérêt de l'entreprise. Ainsi, une des possibilités est, par exemple, de retarder un investissement. Cette option est considérée par l'approche options réelles mais n'est pas possible avec la valeur présente nette. C'est alors que la VOR vient bonifier la VPN et que la valeur du projet s'en trouve augmenté.

5.2 Taux de rendement interne (TRI)

Parmi les différents critères de sélection de projets d'investissement, le taux de rendement interne (TRI) obtient encore beaucoup de popularité. Chacun connaît pourtant passablement bien les défauts de ce critère mais, sa popularité tient toujours grâce à sa facilité d'utilisation et surtout grâce à sa facilité d'interprétation. En effet, ce critère s'exprime en taux de rendement ce qui rend sa vulgarisation plus facile tout en simplifiant la comparaison avec d'autres projets. Les gestionnaires et analystes semblent ainsi préférer parler de rendement plutôt que de valeur monétaire comme dans le cas de la valeur présente nette.

Le but de ce critère de sélection est de déterminer un taux de rendement unique qui synthétise la valeur du projet. Afin de calculer ce taux, il suffit de poser la VPN à zéro et de trouver le taux de rendement approprié. De façon générale, la formule suivante résume cette idée :

$$VPN = 0 = -I_0 + \frac{FM_1}{(1+TRI)} + \frac{FM_2}{(1+TRI)^2} + \ldots + \frac{FM_i}{(1+TRI)^i}$$

Où I_0 = Investissement initial

FM_i = Flux monétaires de la période i

TRI = Taux de rendement interne

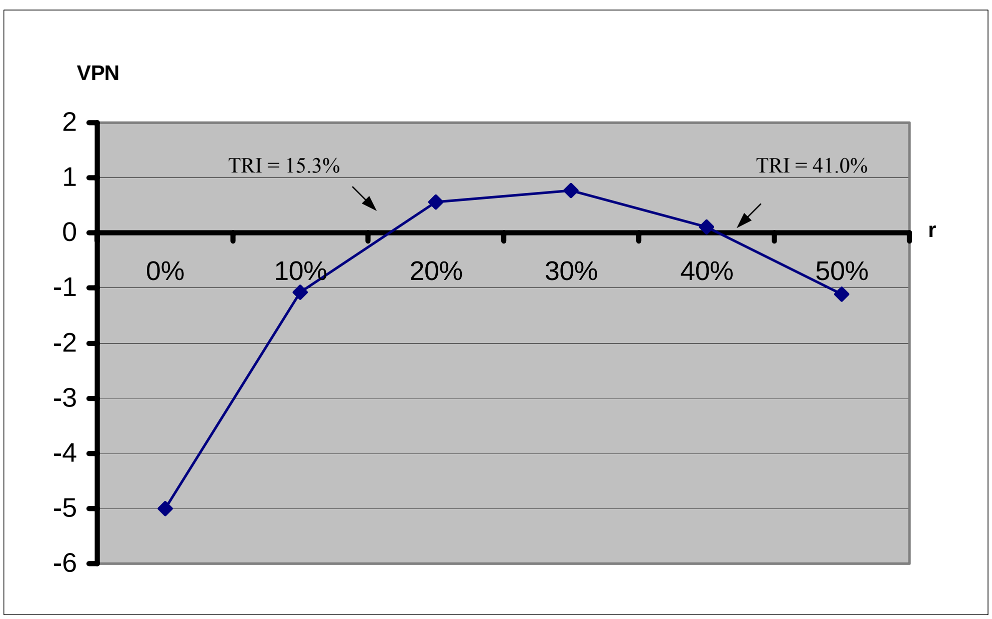
Puisqu'une VPN nulle signifie qu'aucune valeur n'est crée ou perdue, ces calculs permettent donc de déterminer le seuil de rentabilité du projet. Une fois que le taux est déterminé, il faut maintenant être en mesure de juger de la qualité de l'investissement. La décision se fera en comparant le taux de rendement interne avec le taux de rentabilité minimal exigé par les actionnaires. Dans le cas où le TRI est supérieur au taux exigé, l'investissement est considéré comme étant rentable et dans le cas contraire l'investissement doit être refusé.

Tableau 6 : Critère de décision du TRI

TRI < Taux minimal exigé	Refuser le projet
TRI > Taux minimal exigé	Accepter le projet

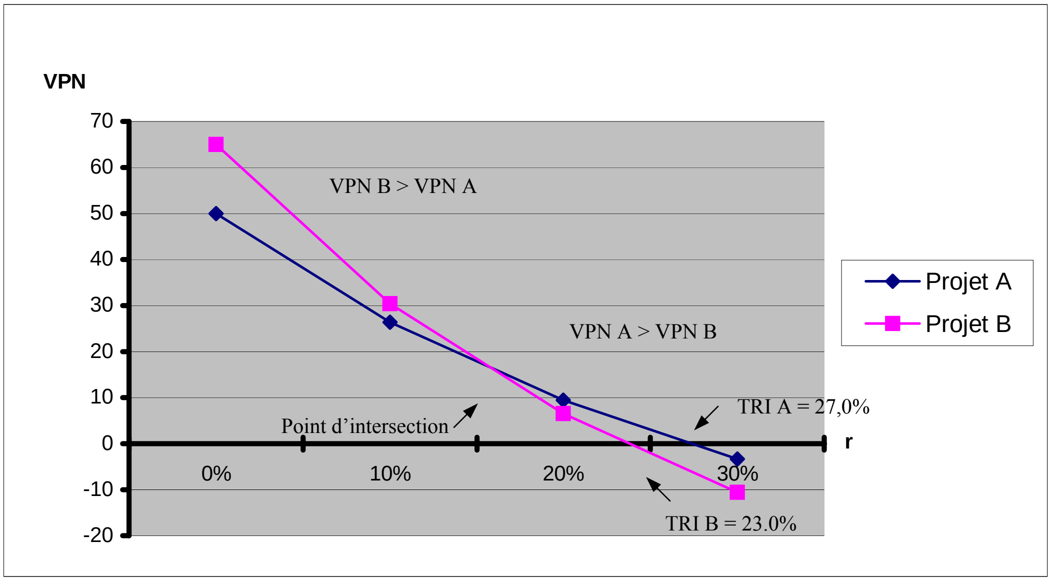
Quoique facile d'utilisation, le taux de rendement interne est toutefois incalculable dans certaines situations et peut aussi mener à des décisions sous optimales. C'est le cas en ce qui a trait aux projets comportant des flux monétaires non conventionnels et aux projets mutuellement exclusifs. Un projet comportant des flux monétaires non conventionnels signifie que certains flux monétaires sont négatifs plutôt que strictement positifs. Dans ce cas, des taux de rendement multiples peuvent surgir lorsque plusieurs taux rendent la VPN nulle. Comme aucune règle ne dicte quel taux choisir, il devient ainsi impossible d'utiliser ce critère de décision afin de déterminer si le projet est acceptable ou non.

Graphique 4 : Taux de rendement multiples



Dans le cas des projets mutuellement exclusifs, soit lorsqu'un seul projet parmi plusieurs doit être choisit, le taux de rendement interne peut aussi mener à des décisions non optimales. En effet, le meilleur projet sera celui ayant la VPN la plus élevée mais ceci ne signifie pas que ce projet aura le plus grand taux de rendement. Comme le démontre le graphique 5 et en ce basant sur le critère du taux de rendement interne, le projet A serait choisit puisqu'il détient le plus haut taux de rendement.

Graphique 5 : Projet mutuellement exclusifs



Toutefois, les indications que donnent la VPN et le TRI peuvent être divergents. D'un côté du point d'intersection, le projet B a une VPN plus grande que le projet A toutefois du côté droit de ce même point, le projet A a une valeur monétaire plus élevée. Ainsi, avec un coût du capital de 10%, la VPN porte à l'acceptation du projet B tandis que le TRI choisit le projet A. Comme le démontre cet exemple, l'utilisation du TRI dans le cas de projets mutuellement exclusifs peut parfois amener une situation non optimale.

Ce critère de sélection ne peut donc pas d'être calculé pour tous les projets et c'est ce qui le rend moins efficace que la VPN. De plus, les mêmes techniques de calculs des flux monétaires sont utilisées pour la TRI que pour la VPN. Ainsi, le critère se retrouve avec la plupart des défauts que possède la VPN. L'approche par les options réelles présente alors plusieurs avantages que le taux de rendement interne ne possèdent pas. De plus, tout comme la VPN, le TRI ne considère pas la flexibilité. L'approche par les options réelles se révèle donc, encore une fois, comme étant le critère de sélection le plus approprié.

5.3 *Le délai de récupération (Payback)*

Le délai de récupération, couramment appelé payback, est plus facile à calculer que le taux de rendement interne et est aussi utilisé par plusieurs entreprises malgré les défauts qui lui sont attribués. Ce critère évalue le laps de temps nécessaire pour récupérer l'investissement initial ou la mise de fond. Afin de le calculer, il suffit d'additionner les flux monétaires futurs et de voir en combien de temps il est possible de récupérer l'investissement initial. Le critère de décision est aussi très simple à utiliser. L'investissement sera acceptable que si le délai de récupération est inférieur à la limite établie par les gestionnaires.

Tableau 7 : Critère de décision du délai de récupération

Délai de récupération < Temps établi	Accepte le projet
Délai de récupération > Temps établi	Refuse le projet

Comme mentionné plus haut, une des qualités de ce critère est sa facilité d'utilisation. Plusieurs décisions ne nécessitent pas d'études complexes et le délai de récupération devient alors le critère de choix puisqu'il est rapide et peu coûteux. De plus, ce critère favorise les projets très rentables à court terme ce qui permet aux entreprises d'avoir des liquidités plus rapidement. Ainsi, une entreprise qui est plus préoccupée par ses résultats à court terme sera portée à utiliser ce critère. Toutefois, plusieurs lacunes rendent ce critère moins intéressant. En effet, le délai de récupération n'a pas recours à l'actualisation et ainsi ne tient pas compte de la valeur temporelle des flux. De plus, ce critère ne tient pas compte des différents risques associés aux projets puisqu'il utilise la même méthode de calcul peut importe les projets. Ainsi, en négligeant tous ces aspects, ce critère devient peu efficient comparativement à l'approche par les options réelles. Un autre problème le concernant est l'établissement de la période limite après laquelle les investissements ne sont plus acceptés. Cette période est fixée par les gestionnaires de façon totalement arbitraire. Ainsi, la règle de décision sera transformée selon les conditions de l'entreprise et ne laisse pas place à l'objectivité. Finalement, ce critère ne tient pas compte des flux monétaires possible après le délai. Ainsi, plusieurs projets rentables à long terme ne seront pas considérés par l'entreprise. Ceci crée un biais énorme lors de la sélection des projets d'investissement car seuls les projets rentables à court terme seront alors considérés. Ce critère de sélection présente donc plusieurs déficiences et peut donc procurer des décisions sous optimales pour l'entreprise. Une fois de plus, l'approche par les options réelles se démarque du délai de récupération puisqu'elle ne possède aucune de ces lacunes.

6. Conclusion

En ce qui a trait aux critères de sélection de projets d'investissement, l'approche par les options réelles s'est révélée comme étant la plus optimale. En effet, cette approche incorpore un élément essentiel de la gestion soit la flexibilité. Voilà pourquoi, en négligeant cet aspect, les critères de sélection classiques comme la valeur présente nette et le taux de rendement interne amènent des décisions sous optimales. L'approche par les options réelles concède donc aux dirigeants un caractère réactif face aux différentes opportunités et valorise se comportement.

Même si plusieurs entreprises ne sont pas prêtes à appliquer la méthode des options réelles, il est possible d'apercevoir une transformation de leur façon de penser. De plus en plus d'entreprises, suite à l'utilisation des la VPN, considèrent la présence d'opportunités sans toutefois incorporer leurs valeurs aux calculs. Il ne faut toutefois pas s'étonner de la lenteur d'implantation de l'approche options réelles au sein des entreprises. La VPN, qui est maintenant un critère connu de tous, a pris pas moins d'une décennie avant d'être pleinement reconnu. Ainsi, plusieurs efforts devront être appliqués afin de démontrer les atouts des options réelles mais surtout afin de démystifier la méthode de calculs qui est perçue comme étant plus complexe que celle de la VPN. Malgré tout, l'approche par les options réelles saura se faire reconnaître par ses atouts uniques.

Sources Documentaires

Avinash K. DIXIT and Robert PINDYCK, 1994, *Investment under uncertainty*, Princeton University Press.

R. MCDONALD and D. SIEGEL, 1986, *The value of waiting to invest*, Quaterly Journal of Economics, vol 101, pp707-728.

John C. HULL, 2002, *Fundamentals of futures and options markets*, Prentice Hall.

ROSS, WESTERFIELD, JAFFE, ROBERT, 2003, *Corporate Finance*, McGraw-Hill Ryerson.

Avinash K. DIXIT, 1993, *The art of smooth pasting*, Harwood Academic.

Richard DURETT, 1996, *Stochastic Calculus: A practical Introduction*, CRC.

Robert GESKE, 1979, *The valuation of compound options, Journal of Financial Economics*, vol 7, pp 63-81.

Claude HENRY, 1974, *Investment decisions under uncertainty: The irreversibility Effect*, American Economic Review, 1006-1012.

Lenos TRIGEORGIS, 1993, *The nature of option interactions and the valuation of investments with multiple real options*, Journal of Financial and quantitative analysis, Vol 28, No 1, pp 1-20.

Robert S. PINDYCK, 1991, *Irreversibility, Uncertainty, and Investment*, Journal of Economic Literature, Vol 29, No 3, pp1110-1148

Annexes

Annexe 1 - Processus stochastique

Parmi les différentes variables à considérer à travers l'évaluation, une seule est source d'incertitude soit les revenus de vente de l'entreprise. En effet, les revenus de vente futurs ne peuvent être déterminés avec assurance. Afin de pouvoir calculer la valeur des différentes options, il faut d'abord être en mesure de déterminer leur trajectoire pour ensuite les quantifier. Pour ce faire, il faut savoir que l'évolution des revenus suit un processus stochastique. Dixit et Pindyck (1994) décrivent un processus stochastique comme étant une variable qui évolue dans le temps d'une façon totalement ou partiellement aléatoire. Plus précisément, un processus stochastique $\{ X_t : t \varepsilon T \}$ est une suite de variables aléatoires indexées par t dans un ensemble dénoté χ. L'indice t représente le temps et χ est l'ensemble des états du processus. En ce qui a trait aux revenus de l'entreprise dénotés R_t, ceux-ci représentent les revenus au temps t et puisqu'ils sont supérieurs ou égaux à zéro, l'ensemble χ ne contiendra que des réels positifs ($\Re^+$).

Afin de déterminer l'évolution des revenus, Mouvement Brownien Géométrique, un processus en temps continu, sera utilisé. Ce processus possède ainsi trois propriétés importantes qu'il faut souligner :

1) Le Mouvement Brownien possède les propriétés de Markov. Un processus de Markov est un processus stochastique où seules les valeurs présentes sont pertinentes dans la prédiction des valeurs futures. Ceci signifie donc que les revenus futurs de l'entreprise ne sont pas affectés par les valeurs passées. Ainsi, seule la valeur des revenus au moment présent sera adéquate afin de déterminer les valeurs futures des revenus de vente de l'entreprise.
2) Comme le Mouvement Brownien est un processus de Wiener, il possède comme ce dernier, des incréments indépendants. Ceci signifie que la probabilité de distribution d'un changement durant un intervalle de temps est indépendante de tout autre changement sur un autre intervalle.

3) Finalement, les changements dans le processus sur une période de temps finie sont distribués selon une loi normale avec une moyenne nulle et une variance égale à chaque instant du temps.

Les revenus de l'entreprise dénotés R_t, doivent être supérieurs ou égaux à zéro. Ainsi, assumons que $Y_t = \ln(R_t)$. La variable R_t suivra alors un Mouvement Brownien Géométrique de la forme suivante :

$$dR_t = \alpha R_t dt + \sigma R_t dz$$

où α = taux de croissance du marché

σ = volatilité des revenus

$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}$ et $\varepsilon \sim N(0,1)$

Les changements dans le logarithme de R_t ont alors une distribution log-normale. Utilisons le Lemme d'Ito afin de faire varier les paramètres du processus.

Ce lemme dit que le processus des revenus futurs est:

$$dY = (\frac{dY}{dR}\alpha R + \frac{dY}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2Y}{dR^2}\sigma R^2)dt + \sigma\frac{dY}{dR}dZ$$

Où $\frac{dY}{dR} = \frac{1}{R}$, $\frac{dY}{dt} = 0$, $\frac{d^2Y}{dR^2} = -\frac{1}{R^2}$

Ainsi, le processus prend cette forme :

$$dY = (\alpha - 0.5\sigma^2)dt + \sigma dZ$$

$Y_t = \ln(R_t)$ suit donc un Mouvement Brownien absolu. Ainsi, à n'importe quel temps t, $Y_t = \ln(R_t)$ est normalement distribué avec une moyenne $(y_o - \mu t)$ et une variance $\sigma^2 t$. En d'autres mots, R_t a une distribution log-normale avec une moyenne correspondant à:

$$(y_o + \mu t) \Rightarrow \ln R_o + (\alpha - 0.5\sigma^2)$$

et un écart-type de $\sigma\sqrt{t}$

Il est donc possible de démontrer que :

$$\ln R_t - \ln R_0 \sim \; N\left[\; (\alpha - 0.5\sigma^2)t, \sigma\sqrt{t} \;\; \right]$$

ou

$$Y_t \sim \; N\left[\; (\ln R_0 + (\alpha - 0.5\sigma^2)t, \sigma\sqrt{t} \;\; \right]$$

Ainsi, la fonction de densité de R_t peut être déterminée comme étant :

$$f(R_t) = \frac{1}{R_t b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln R_t - a}{b}\right)^2}$$

Où $a = \ln R_0 + (\alpha - 0.5\sigma^2)t$ est la moyenne et $b = \sigma\sqrt{t}$ est l'écart type.

Annexe 2 - <u>Calculs du cas avec investissement immédiat</u>

La compagnie Pepsi peut construire 3 unités. La notation pour ce problème est la suivante pour la i^{ième} unité :

T_i = Date où la compagnie doit prendre la décision de construire la i^{ième} unité ($T_1 = 0$)

τ_i = Durée de vie de la i^{ième} unité

I_i = Coûts de construction de la i^{ième} unité

C_i = Coûts de production de la i^{ième} unité

R_t = Revenus au temps t pour chaque unité de production

Ainsi $dR_t = \alpha R_t dt + \sigma R_t dw$ avec $dw = \varepsilon_t \sqrt{dt}$ et $\varepsilon \sim N(0,1)$

$F_i(R_{T_i}, T_i)$ = Bénéfice de la i^{ième} unité au moment de prendre la décision d'investir

$V_i(R_{T_i}, C_i, \tau_i)$ = Valeur actualisée des flux monétaires de la i^{ième} unité

<u>1. Troisième et dernière unité</u>

Le bénéfice de la dernière unité est le suivant :

$$F_3(R_{T_3}, T_3) = \text{Max } [V_3(R_{T_3}, C_3, \tau_3) - I_3, 0]$$

Où

$$V_3(R_{T_3}, c_3, \tau_3) = E\left[\int_0^{\tau_3} R_t e^{-rt} dt\right] - \int_0^{\tau_3} c_3 e^{-rt} dt$$

Nous avons

$$E\left[\int_0^{\tau_3} R_t * e^{-rt} dt\right] = \int_0^{\tau_3}\int_0^{+\infty} R_t * f(R_t | R_0 = R_{T_3}) * e^{-rt} dR_t dt$$

avec

$$f(R_t | R_0 = R_{T_3}) = \frac{1}{R_t b_3 \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln R_t - a_3}{b_3}\right)^2}$$

où

$$a_3 = \ln R_{T_3} + (\alpha - 1/2\,\sigma^2)t \qquad \text{et} \qquad b_3 = \sigma\sqrt{t}$$

Nous avons donc

$$E\left[\int_0^{\tau_3} R_t * e^{-rt} dt\right] = \int_0^{\tau_3} e^{-rt} \int_0^{+\infty} \frac{R_t}{R_t b_3 \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln R_t - a_3}{b_3}\right)^2} dR_t dt$$

Effectuons un changement de variable :

$$Z = \frac{\ln R_t - a_3}{b_3} \Rightarrow \qquad b_3 dZ = \frac{1}{R_t} dR_t \Rightarrow \qquad R_t = e^{b_3 Z + a_3}$$

Ainsi ;

$$E\left[\int_0^{\tau_3} R_t * e^{-rt} dt\right] = \int_0^{\tau_3} e^{-rt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b_3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} R_t b_3 dZdt = \int_0^{\tau_3} e^{-rt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZdt$$

$$= \int_0^{\tau_3} e^{-rt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(b_3 Z + a_3)}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZdt = \int_0^{\tau_3} e^{-rt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{b_3 Z} * e^{a_3} * e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZdt$$

Effectuons un autre changement de variable :

$$w = Z - b_3 \Rightarrow \; dw = dZ$$

$$E\left[\int_0^{\tau_3} R_t * e^{-rt} dt\right] = \int_0^{\tau_3} e^{-rt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{a_3} * e^{b_3(w+b_3)} * e^{-\frac{1}{2}(w+b_3)^2} dwdt$$

$$\int_0^{\tau_3} e^{-rt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{(a_3 + \frac{1}{2}b_3^2)} * e^{-\frac{1}{2}w^2} dwdt = \int_0^{\tau_3} e^{-rt} * e^{(a_3+\frac{1}{2}b_3^2)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw}_{=1} dt$$

Alors ;

$$E\left[\int_0^{\tau_3} R_t * e^{-rt} dt\right] = \int_0^{\tau_3} e^{-rt} * e^{(a_3 + \frac{1}{2}b_3^2)} dt$$

où

$$a_3 + \frac{1}{2} b_3^{\,2} = \ln R_{T_3} + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \frac{1}{2}\sigma^2 t = \ln R_{T_3} + \alpha t$$

$$\Rightarrow e^{a_3 + \frac{1}{2}b_3^2} = R_{T_3} * e^{\alpha t}$$

Et ainsi

$$E\left[\int_0^{\tau_3} R_t * e^{-rt}dt\right] = \int_0^{\tau_3} e^{-rt} * e^{(a_3+\frac{1}{2}b_3{}^2)}dt = R_{T_3}\int_0^{\tau_3} e^{-(r-\alpha)t}dt = \frac{R_{T_3}}{r-\alpha}(1-e^{-(r-\alpha)\tau_3})$$

Aussi,

$$\int_0^{\tau_3} c_3 * e^{-rt}dt = \frac{c_3}{r}(1-e^{-r\tau_3})$$

Et finalement

$$F_3(R_{T_3},T_3) = Max\left[\left(\frac{R_{T_3}}{r-\alpha}(1-e^{-(r-\alpha)\tau_3}) - \frac{c_3}{r}(1-e^{-r\tau_3}) - I_3\right),0\right]$$

$$\Rightarrow R_{T_3}{}^0 = \frac{r-\alpha}{1-e^{-(r-\alpha)\tau_3}}\left[\frac{c_3}{r}(1-e^{-r\tau_3}) + I_3\right]$$

Puisque dans le cas présent $\tau_3 = \infty$, les équations à utiliser sont ;

$$F_3(R_{T_3},T_3) = Max\left[\left(\frac{R_{T_3}}{r-\alpha} - \frac{c_3}{r} - I_3\right),0\right]$$

$$\Rightarrow R_{T_3}{}^0 = (r-\alpha)\left[\frac{c_3}{r} + I_3\right]$$

2. Deuxième unité

Le bénéfice de la deuxième unité est le suivant :

$$F_2(R_{T_2},T_2) = Max\left\{\left(V_2(R_{T_2},C_2,\tau_2) + e^{-r(T_3-T_2)}E_{T_2}\left[F_3(R_{T_3},T_3)\right]\right) - I_2, 0\right\}$$

Où

$$V_2(R_{T_2},c_2,\tau_2) = \frac{R_{T_2}}{r-\alpha}(1-e^{-(r-\alpha)\tau_2}) - \frac{c_2}{r}(1-e^{-r\tau_2})$$

Et

$$E_{T_2}(F_3(R_{T_3},T_3) = \int_{R_{T_3}{}^0}^{+\infty}\left[\frac{R_{T_3}}{r-\alpha}(1-e^{-(r-\alpha)\tau_3}) - \frac{c_3}{r}(1-e^{-r\tau_3}) - I_3\right] f(R_{T_3} \mid R_0 = R_{T_2})dR_{T_3}$$

Où

$$f(R_{T_3} \mid R_0 = R_{T_2}) = \frac{1}{R_{T_3} b_2 \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln R_{T_3} - a_2}{b_2})^2}$$

Avec

$$a_2 = \ln R_{T_2} + (\alpha - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T_3 - T_2) \qquad \text{et} \qquad b_2 = \sigma\sqrt{T_3 - T_2}$$

Ce qui donne

$$E_{T_2}(F_3(R_{T_3}, T_3)) = \frac{(1 - e^{-(r-\alpha)\tau_3}}{r - \alpha} \int_{R_{T_3}0}^{+\infty} \frac{1}{b_2\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln R_{T_3} - a_2}{b_2})^2} dR_{T_3} \qquad (1)$$

$$-\frac{c_3}{r}(1 - e^{-r\tau_3}) \int_{R_{T_3}0}^{\infty} \frac{1}{R_{T_3} b_2 \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln R_{T_3} - a_2}{b_2})^2} dR_{T_3} \quad (2)$$

$$-I_3 \int_{R_{T_3}0}^{\infty} \frac{1}{R_{T_3} b_2 \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln R_{T_3} - a_2}{b_2})^2} dR_{T_3} \qquad (3)$$

<u>De l'intégrale (1)</u>

$$\frac{(1 - e^{-(r-\alpha)\tau_3})}{r - \alpha} \int_{R_{T_3}0}^{+\infty} \frac{1}{b_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln R_{T_3} - a_2}{b_2})^2} dR_{T_3}$$

Effectuons un changement de variable :

$$Z = \frac{\ln R_{T_3} - a_2}{b_2} \Rightarrow \qquad R_{T_3} = e^{zb_2 + a_2} \Rightarrow \qquad dR_{T_3} = R_{T_3} b_2 dZ$$

Ainsi

$$\frac{(1 - e^{-(r-\alpha)\tau_2})}{r - \alpha} \int_{R_{T_3}0}^{+\infty} \frac{1}{b_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln R_{T_3} - a_2}{b_2})^2} dR_{T_3} = \frac{(1 - e^{-(r-\alpha)\tau_2})}{r - \alpha} \int_{\frac{\ln R_{T_3}0 - a_2}{b_2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{zb_2 + a_2} * e^{-\frac{1}{2}z^2} dZ$$

Posons $\quad w = Z - b_2 \Rightarrow \quad Z = w + b_2 \quad$ et $\quad dw = dZ$

$$\Rightarrow \int_{\frac{\ln R_{T_3}{}^0 - a_2}{b_2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{Zb_2 + a_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dZ \quad = \int_{\frac{\ln R_{T_3}{}^0 - a_2 - b_2^2}{b_2}}^{+\infty} \frac{e^{a_2 + \frac{1}{2}b_2^2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw \quad = e^{a + \frac{1}{2}b_2{}^2} \Phi(d_1)$$

Où

$$d_1 = \frac{b_2^2 + a_2 - \ln R_{T_3}{}^0}{b_2}$$

L'intégrale (1) donne : $\dfrac{R_{T_2} e^{\alpha(T_3 - T_2)} (1 - e^{-(r-\alpha)\tau_3})}{r - \alpha} \Phi(d_1)$

<u>De l'intégrale (2)</u>

$$\frac{c_3}{r}(1 - e^{-r\tau_3}) \int_{R_{T_3}{}^0}^{+\infty} \frac{1}{R_{T_3} b_2 \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln R_{T_3} - a_2}{b_2})^2} dR_{T_3}$$

Effectuons un changement de variable :

$$Z = \frac{\ln R_{T_3} - a_2}{b_2} \Rightarrow \quad R_{T_{3=}} = e^{zb_2 + a_2} \Rightarrow \quad dR_{T_3} = R_{T_3} b_2 dZ$$

Alors

$$\int_{R_{T_3}{}^0}^{+\infty} \frac{1}{R_{T_3} b_2 \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln R_{T_3} - a_2}{b_2})^2} dR_{T_3} = \int_{\frac{\ln R_{T_3}{}^0 - a_2}{b_2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

L'intégrale (2) donne $= \dfrac{c_3}{r}(1 - e^{-r\tau_3})\Phi(d_2)$

avec

$$d_2 = \frac{a_2 - \ln R_{T_3}{}^0}{b_2} = d_1 - b_2$$

<u>De l'intégrale (3)</u>

$$I_3 \int_{R_{T_3}{}^0}^{+\infty} \frac{1}{R_{T_3} b_2 \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln R_{T_3} - a_2}{b_2})^2} dR_{T_3}$$

Effectuons un changement de variable :

$$Z = \frac{\ln R_{T_3} - a_2}{b_2} \Rightarrow \quad R_{T_{3=}} = e^{zb_2 + a_2} \Rightarrow \quad dR_{T_3} = R_{T_3} b_2 dZ$$

Alors

$$I_3 \int_{R_{T_3}{}^0}^{+\infty} \frac{1}{R_{T_3} b_2 \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln R_{T_3} - a_2}{b_2})^2} dR_{T_3} = I_3 \int_{\frac{\ln R_{T_3}{}^0 - a_2}{b_2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

L'intégrale (3) donne $= I_3 \Phi(d_2)$

Avec

$$d_2 = \frac{a_2 - \ln R_{T_3}{}^0}{b_2} = d_1 - b_2$$

Finalement

$$E_{T_2}\left[F_3(R_{T_3}, T_3)\right] = \frac{R_{T_2} * e^{\mu(T_3 - T_2)}(1 - e^{-(r-\mu)\tau_3})}{r - \mu} \Phi(d_1) - \left[\frac{c_3}{r}(1 - e^{-r\tau_3}) + I_3\right] \Phi(d_2)$$

Et

$$\begin{aligned} F_2(R_{T_2}, T_2) = Max\Big\{ \Big[& \frac{R_{T_2}}{r - \alpha}(1 - e^{-(r-\alpha)\tau_2}) - \frac{c_2}{r}(1 - e^{-r\tau_2}) \Big] \\ & + e^{-r(T_3 - T_2)} \Big[\Big(\frac{R_{T_2}}{r - \mu} * e^{\alpha(T_3 - T_2)}(1 - e^{-(r-\alpha)\tau_3}) \Big) \Phi(d_1) \\ & - \Big(\frac{c_3}{r}(1 - e^{-r\tau_3}) + I_3 \Big) \Phi(d_2) \Big] - I_2, 0 \Big\} \end{aligned}$$

Puisque dans le cas présent $\tau_2 = \infty$, cette équation devient ;

$$\begin{aligned} F_2(R_{T_2}, T_2) = Max\Big\{ \Big(\Big[& \frac{R_{T_2}}{r - \alpha} - \frac{c_2}{r} \Big] + e^{-r(T_3 - T_2)} \Big[\Big(\frac{R_{T_2}}{r - \mu} * e^{\alpha(T_3 - T_2)} \Big) \Phi(d_1) \\ & - \Big(\frac{c_3}{r} + I_3 \Big) \Phi(d_2) \Big] \Big) - I_2, 0 \Big\} \end{aligned}$$

3. Première unité

Le bénéfice de la première unité est le suivant

$$F_1(R_{T_1},T_1) = Max\left[V_1(R_{T_1},c_1,\tau_1) + e^{-r(T_2-T_1)}E_{T_1}\left[F_2(R_{T_2},T_2)\right] - I_1, 0\right]$$

où

$$E_{T_1}\left[F_2(R_{T_2},T_2)\right] = E_{T_1} Max\left\{V_2(R_{T_2},c_2,\tau_2) + e^{-r(T_3-T_2)}E_{T_2}\left[F_3(R_{T_3},T_3)\right] - I_2, 0\right\}$$

Il faut trouver $R_{T_2}^0$ et dans ce cas $R_{T_2}^0$ doit satisfaire :

$$\frac{R_{T_2}^0}{r-\alpha}(1-e^{-(r-\alpha)(T_3-T_2)}) + \frac{R_{T_2}^0 e^{-(r-\alpha)(T_3-T_2)}}{r-\alpha}(1-e^{-(r-\alpha)\tau_3})\Phi(d_1) = I_2$$
$$+\frac{c_2}{r}(1-e^{r\tau_2}) + e^{-r(T_3-T_2)}(\frac{c_3}{r}(1-e^{-r\tau_3}) + I_3)\Phi(d_2)$$

N'oublions pas que d_1 et d_2 dépendent de $R_{T_2}^0$. Maintenant calculons

$$E_{T_1}\left[V_2(R_{T_2},c_2,\tau_2)\middle| R_{T_2} \geq R_{T_2}^0\right] =$$
$$\int_{R_{T_2}}^{+\infty}\left[\ \frac{R_{T_2}}{r-\alpha}(1-e^{-(r-\alpha)\tau_2}) - \frac{c_2}{r}(1-e^{-r\tau_2})\ \right] f(R_{T_2} \mid R_0 = R_{T_1})dR_{T_2}$$

Nous avons ici

$$a_1 = \ln R_{T_1} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T_2 \qquad \text{et} \qquad b_1 = \sigma\sqrt{T_2} \qquad (4)$$

Ce qui donne en suivant la même démarche que dans le cas de la deuxième unité

$$E_{T_1}\left[V_2(R_{T_2},c_2,\tau_2)\middle| R_{T_2} \geq R_{T_2}^0\right] = \frac{R_{T_1}e^{\alpha T_2}}{r-\alpha}(1-e^{-(r-\alpha)\tau_2})\Phi(d_3) - (\frac{c_2}{r}(1-e^{-r\tau_2}) + I_2)\Phi(d_4)$$

avec

$$d_3 = \frac{b_1^2 + a_1 - \ln R_{T_2}^0}{b_1} \qquad \text{et} \qquad d_4 = d_3 - b_1$$

Finalement

$$E_{T_1}\left\{\ E_{T_2}\left[F_3(R_{T_3},T_3)\right]\ \middle|R_{T_2}\geq R_{T_2}{}^0\ \right\}=$$

$$\int_{R_{T_2}}^{0}\left[\frac{R_{T_2}e^{\alpha(T_3-T_2)}}{r-\alpha}(1-e^{-(r-\alpha)\tau_3})\Phi(d_1(R_{T_2}))-\left(\frac{c_3}{r}(1-e^{-r\tau_2})+I_3\right)\Phi(d_2(R_{T_2}))\right]f(R_{T_2}\left|R_0=R_{T_1}\right.)dR_{T_2}$$

Afin de calculer cette intégrale, effectuons un changement de variable ;

$$R_{T_2}=x+R_{T_2}^0\Rightarrow dR_{T_2}=dx$$

$$\Rightarrow E_{T_1}\left\{\ E_{T_2}\left[F_3(R_{T_3},T_3)\right]\ \middle|R_{T_2}\geq R_{T_2}{}^0\ \right\}\quad=$$

$$\int_{0}^{+\infty}\left[\frac{(x+R_{T_2}^0)e^{\alpha(T_3-T_2)}}{r-\alpha}\left(1-e^{-(r-\alpha)\tau_3}\right)\Phi(d_1(x+R_{T_2}))-(\frac{c_3}{r}(1-e^{-r\tau_3})+I_3)\Phi(d_2(x+R_{T_2}^0))\right]f(x+R_{T_2}^0\left|R_0=R_{T_1}\right.)dx$$

Nous évaluons cette intégrale à l’aide de la méthode d’intégration numérique de Gauss-Laguerre après avoir multiplié la fonction par $e^{x}e^{-x}$